Kolokwium z Rachunku prawdopodobieństwa – 21.04.2023

Z poniższych zadań należy wybrać 5. W przypadku oddania 6 zadań do końcowej punktacji będzie liczyć się 5 ocenionych najniżej. Za każde zadanie można otrzymać max. 10 punktów.

Rozwiązania zadań prosimy oddawać na oddzielnych kartkach podpisanych **czytelnie** *imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Należy dokładnie uzasadniać odpowiedzi. Wyniki należy podawać w postaci zwartych wzorów, a w przypadku odpowiedzi liczbowych, ostatecznych wyników numerycznych.*

Czas trwania: **160 minut**

B1. Niech $b = (b_1, \ldots, b_m)$ będzie losowo wybranym ciągiem długości m o wyrazach ze zbioru $\{1, \ldots, m\}$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą (wybór każdego z ciągów jest tak samo prawdopodobny). Obliczyć prawdopodobieństwo, że

(a) w ciągu b występują co najmniej dwie jedynki,
(b) w ciągu b występują dokładnie dwie jedynki, jeśli wiadomo, że w ciągu b występują co najmniej dwie jedynki,
(c) ciąg b jest niemalejący.

B2. Dany jest prostokąt o bokach długości a i b. Niech O oznacza środek symetrii prostokąta. Z brzegu prostokąta wybrano losowo dwa punkty, P i Q. Proste PO i QO dzielą prostokąt na rozłączne wielokąty. Niech X oznacza liczbę tych wielokątów, które są pięciokątami.

(a) Wyznaczyć rozkład zmiennej X.
(b) Wykazać, że $\mathbb{P}(X = 2) \geqslant \frac{1}{2}$.

B3. W finale turnieju bilardowego znalazło się dwóch graczy A i B. W pojedynczej grze każdy z graczy wygrywa z prawdopodobieństwem 50%, pojedynek trwa dopóki któryś z graczy nie zwycięży po raz piąty (łącznie, niekoniecznie pod rząd). W pierwszej grze zwyciężył gracz B. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

(a) gracz B wygrał pojedynek,
(b) w drugiej grze wygrał gracz A, jeśli pojedynek wygrał gracz B,
(c) rozegrano przynajmniej 8 gier (łącznie z pierwszą),
(d) w drugiej grze wygrał gracz A, jeśli rozegrano przynajmniej 8 gier.

B4. Na planecie Ksi odbywa się bal. Uczestniczy w nim nieznana liczba par kosmitów. Prawdopodobieństwo, że par jest dokładnie n wynosi $\frac{8^n}{n!(e^8-1)}$, dla $n = 1, 2, \ldots$. W ramach zabawy uczestnicy rozdzielają się, a następnie ponownie łączą się w pary w sposób całkowicie losowy (każdy podział na pary zbioru $2n$ uczestników jest tak samo prawdopodobny). Okazało się, że kosmici połączyli się w pary w takiej samej konfiguracji jak na początku. Obliczyć prawdopodobieństwo (warunkowe), że w balu uczestniczy dokładnie m par kosmitów.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right)$.

B5. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^{-2}\mathbb{1}_{[1,6]}(x)$, gdzie c jest stałą.

(a) Wyznaczyć c.
(b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Z = \max\{X, \frac{1}{3}X^2\}$.
(c) Czy Z ma rozkład ciągły? Jeśli tak, wyznaczyć gęstość.

B6. W urnie znajduje się jedna biała kula. Rozważmy następujący ciąg doświadczeń. W kroku m ($m = 1, 2, \ldots$) eksperymentator losuje kulę z urny, zapisuje jej kolor, następnie zwraca ją do urny i dokłada m^r kul białych oraz m^s kul czarnych, gdzie r, s to ustalone nieujemne liczby całkowite. Losowania w kolejnych krokach są niezależne. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kula biała zostanie wylosowana nieskończenie wiele razy.

Wskazówka: Dla $k \geqslant 0$, $\frac{1}{k+1}m^{k+1} \leqslant \sum_{i=1}^{m} i^k \leqslant m^{k+1}$.